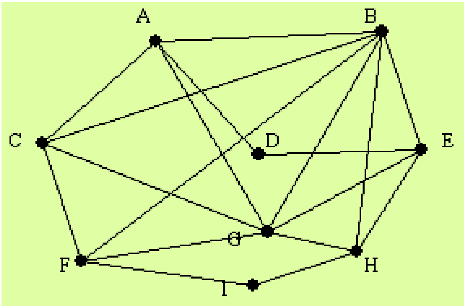
Exercice n°1.

Déterminer le degré de chacun des sommets du graphe ci-dessous :



Exercice n°2.

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue!).

1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant *i* et *j* signifie que *i* espionne *j* que et *j* espionne *i*.

2) Ce graphe est-il complet ? Est-il connexe ?

3) Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes.

Exercice n°3.

Peut-on construire un graphe simple (aucune arête n'est une boucle et il y a au plus une arête entre deux sommets) ayant :

a) 4 sommets et 7 arêtes b) 5 sommets et 11 arêtes c) 10 sommets et 46 arêtes.

Exercice n°4.

Etant donné un groupe de dix personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui ont une relation d'amitié.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amis de *i*	3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2		4,5

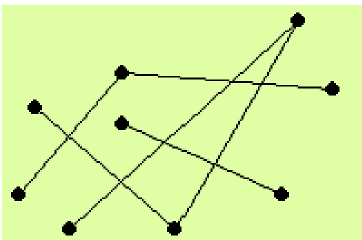
1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 10 dans lequel une arête entre les sommets *i* et *j* signifie qu'il y a une relation d'amitié entre *i* et *j*.

2) Ce graphe est-il complet ? Connexe ?

3) Si l'adage "les amis de nos amis sont nos amis" était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe ?

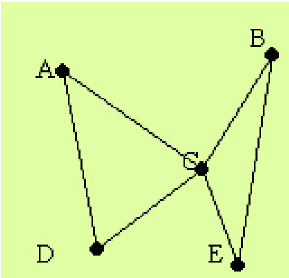
Exercice n°5.

Transformer le graphe ci-dessous en lui rajoutant un nombre minimal d'arêtes pour qu'il soit connexe.



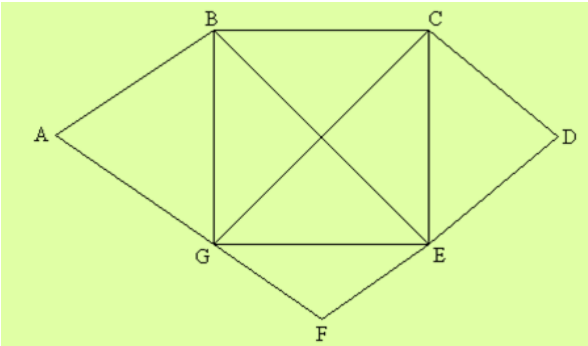
Exercice n°6.

Le chasse neige doit déblayer les 6 routes qui relient 5 villages A, B, C, D et E
Peut-on trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une et une seule fois chaque route ?
a) en partant de E et en terminant par E
b) en partant de C et en terminant à D
c) en partant de A et en terminant à A



Exercice n°7.

Le graphe ci-dessous indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante.



Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance.
Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :
AB : 16 minutes ; AG = 12 minutes ; BC = 8 minutes ; BE : 12 minutes;
BG : 8 minutes ; CD : 7 minutes; CE = 4 minutes ; CG : 10 minutes ;
DE : 2 minutes ; EF : 8 minutes ; EG : 15 minutes ; FG : 8 minutes.
Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens du parcours.
1) Montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet.
2) L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? Justifier la réponse.

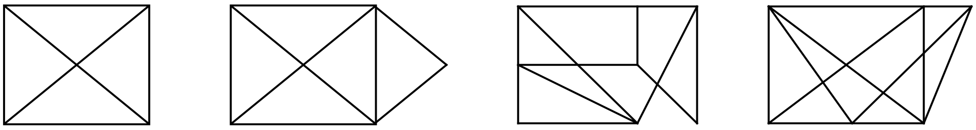
Exercice n°8.

Huit pays sont représentés ci-dessous avec leur frontière (deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points ne sont pas considérés comme voisins)
1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 8 dont les sommets sont les pays et les arêtes les frontières.
2) a) Ce graphe est-il complet ? Connexe ?
   b) Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes ?
3) a) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 5 ?
   b) Quel est le diamètre du graphe ?

4) a) Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule ?
b) est-il possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays ?
5) Quel est le nombre maximum de pays sans frontière commune ? Précisez de quels pays il s'agit
6) Colorez les huit pays avec un nombre minimum de couleurs de telle façon que deux pays adjacents portent deux couleurs différentes.

Exercice n°9

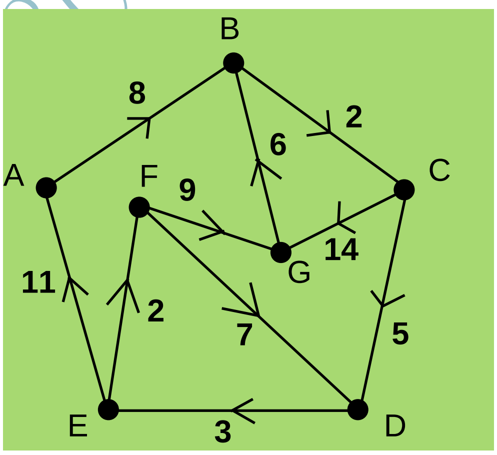
Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait !…) ? Pourquoi ?



Exercice n°10

Remplir le tableau suivant qui, pour le graphe valué ci-dessous, donne la valeur du plus court chemin d'un sommet à un autre.

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							



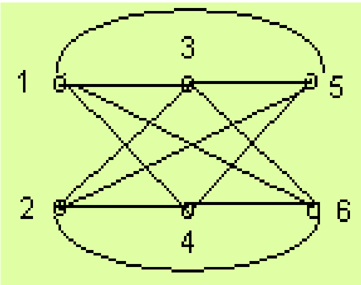
Exercice n°1

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Degré	4	6	4	2	4	4	6	4	2

Exercice n°2

Les espions d'un même pays sont notés : 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6.

1) Graphe



2) Ce graphe n'est pas **complet** car deux espions d'un même pays ne s'espionnent pas, donc les sommets correspondants ne sont pas adjacents.
En revanche ce graphe est **connexe** car entre tout couple de points, il existe au moins une chaîne.
3) Les sommets sont tous de degré 4 car chaque espion en espionne quatre autres.
Autrement dit :

Sommet	1	2	3	4	5	6
Degré	4	4	4	4	4	4

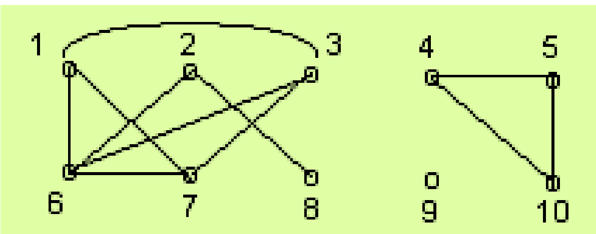
La somme des degrés étant égale au double du nombre d'arêtes, celui-ci vaut 12.

Exercice n°3

a) Si le graphe simple contient 4 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 3, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 12. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 6, donc ne peut pas être égal à 7.
b) Si le graphe simple contient 5 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 4, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 20. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 10, donc ne peut pas être égal à 11.
c) Si le graphe simple contient 10 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum égal à 9, d'où une somme totale des degrés égale au plus à 90. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ≤ 45, donc ne peut pas être égal à 46.

Exercice n°4.

1)

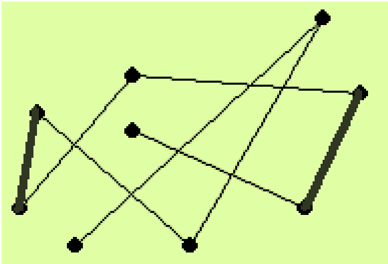


2) Ce graphe n'est pas complet car, par exemple, 1 et 2 ne sont pas adjacents. Il n'est pas connexe car il n'existe pas de chaîne reliant 3 et 4. En revanche, il admet deux sous graphes connexes (1,2,3,6,7,8) (4,5,10) et un point isolé 9.

3) Si l'adage "les amis de nos amis sont nos amis" était vérifié la composante **connexe** (1, 2 , 3 , 6 ,7, 8) serait complète.

Exercice n°5.

En rajoutant deux arêtes (en GRAS), on peut rendre ce graphe connexe.



Exercice n°6

Trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une seule fois chaque route revient à trouver une chaîne eulérienne (voire un cycle) associée à ce graphe.

Tous les sommets étant de degré pair, le théorème d'Euler assurer l'existence d'un cycle eulérien (donc d'une chaîne eulérienne)

a) E-C-D-A-C-B-E est un exemple.

b) il n'existe pas de chaîne eulérienne partant de C et en terminant à D

c) A-D-C-E-B-C-A est un exemple.

Exercice n°7.

1) Puisque seuls les sommets E et G sont de degré impair, ce graphe admet une chaîne eulérienne. Il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Un exemple de trajet est EGCBECDEFGBAG

2) L'agent de sécurité ne peut pas revenir à son point de départ car le théorème d'Euler interdit l'existence d'un cycle eulérien, en raison des deux sommets E et G de degré impair.

Exercice n°8

1) Une représentation possible peut être :

2) a) Ce graphe n'est pas complet (2 et 6 ne sont pas adjacents) mais est connexe.

b)

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	4	4	4	4	2	3	2	3

La somme des degrés vaut $4+4+4+4+2+3+2+3=26$. Il y a donc 13 arêtes.

3) a) La distance entre les sommets 1 et 5 vaut 3.

b) Ce graphe a pour diamètre 3.

4) a) Puisque tous les sommets ne sont pas de degré pair, ce graphe n'admet pas de cycle eulérien, donc il n'est pas possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule.

b) Puisque deux sommets exactement sont de degré impair, ce graphe admet une chaîne eulérienne, donc il est possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays.

5) On doit construire un nouveau graphe ou deux pays seront adjacents s'ils n'ont pas de frontière commune

Le plus grand sous-graphe complet de ce graphe a pour ordre 3. Le nombre maximum de pays sans frontière commune est donc égal à 3

6) Le degré maximum étant égal à 4, et le plus grand sous graphe complet étant d'ordre 4 (1 , 2 , 3 , 8), le nombre chromatique x du graphe vérifie $4 \leq x \leq 5$.

On applique l'algorithme de coloration.

Sommet	Degré	Couleur
1	4	Couleur 1
2	4	Couleur 2
3	4	Couleur 3
4	4	Couleur 4
6	3	Couleur 1
8	3	Couleur 4
5	2	Couleur 2
7	2	Couleur 2

On déduit de cette coloration que $x = 4$

Exercice n°9

De tels tracés sont possibles si le graphe correspondant admet un chemin eulérien, c'est-à-dire s'il contient exactement 0 ou 2 sommets de degré impair. La réponse est donc positive uniquement pour la deuxième figure…

Exercice n°10

Le calcul peut se faire directement… On obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	8	10	15	18	20	24
B	22	0	2	7	10	12	16
C	19	20	0	5	8	10	14
D	14	20	22	0	3	5	14
E	11	17	19	9	0	2	11
F	21	15	17	7	10	0	9
G	27	6	8	13	16	18	0